

## DISEÑO DE MECANISMOS FLEXIBLES PARALELOS BASADO EN TEORÍA DE HELICOIDES

**Alejandro G. Gallardo<sup>a,b</sup> y Martín A. Pucheta<sup>a,b</sup>**

<sup>a</sup>*Centro de Investigación en Informática para la Ingeniería (CIII), Facultad Regional Córdoba de la Universidad Tecnológica Nacional, Maestro López esq. Cruz Roja Argentina, X5016ZAA Córdoba, Argentina, {agallardo,mpucheta}@frc.utn.edu.ar, <http://ciii.frc.utn.edu.ar>*

<sup>b</sup>*Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET)*

**Palabras Clave:** Mecanismos flexibles, Teoría de Helicoides, Sistemas de Helicoides, Mecanismos espaciales.

**Resumen.** Los mecanismos flexibles transmiten movimientos y fuerzas por la deformación de sus miembros flexibles logrando una cinemática de alta precisión. Existen varios métodos para su diseño: método de pseudo rígidos, método de construcción por bloques, método basado en restricciones, método FACT (por las siglas en inglés de Freedom, Actuation and Constraint Topologies), optimización topológica, entre otros. La aplicación de la teoría de helicoides en el método basado en restricciones es la herramienta adecuada para la sistematización del diseño de mecanismos y posibilita su implementación computacional. En este trabajo se describen los fundamentos del método basado en restricciones y se propone utilizar esta herramienta para el diseño de mecanismos flexibles a través de elementos flexores de viga. Se considerarán pequeños desplazamientos de los mecanismos de forma tal que los flexores siempre trabajen en el campo elástico.

## 1. INTRODUCCIÓN

Cuando se compara los mecanismos flexibles con los mecanismos rígidos, los flexibles tienen la ventaja de eliminar necesidades de lubricación, no poseen juegos, reducen o eliminan la fricción y el consiguiente desgaste entre partes, y reducen la complejidad del proceso de ensamblaje y alineación con sus costos asociados. Por ello, se están utilizando para producir movimientos de alta precisión en etapas posicionadoras (Ru et al., 2016), robots y aplicaciones biomédicas, entre otras aplicaciones (Howell et al., 2013).

Los métodos de diseño de mecanismos flexibles se pueden clasificar en cuatro grandes categorías: (i) Reemplazo de Pseudo Rígidos, (ii) Construcción en bloques, (iii) Optimización topológica, y (iv) Diseño basado en restricciones. La primer categoría usa los principios de diseño de mecanismos rígidos, reemplazando las juntas cinemáticas por miembros flexibles (Smith y Chetwynd, 1992; Smith, 2000; Howell, 2001). La segunda categoría se basa en combinar subsistemas con funciones cinemáticas predefinidas y relaciones de entrada/salida conocidas. Mientras que, la optimización topológica consiste en la remoción de material de un cuerpo siguiendo una función objetivo, los algoritmos más efectivos de este método se fundamentan en la derivada topológica. Por último, el diseño basado en restricciones se basa en que el movimiento de un mecanismo queda definido por la localización y orientación de los elementos restrictivos que componen dicho mecanismo. Dentro de esta categoría, se tienen enfoques geométricos basados en teoría de helicoides (Hunt, 1978; Phillips, 1984) que recientemente fueron catalogados en patrones visuales (denominada metodología FACT, por las siglas en inglés de *Freedom, Actuation and Constraint Topologies*) (Hopkins, 2010; Hopkins y Culpepper, 2010a,b), y paralelamente fueron obtenidos mediante álgebra lineal (Su y Tari, 2010; Su et al., 2009b,a). Por ello, esta última categoría es factible de ser sistematizada e implementada computacionalmente y es el enfoque más prometedor para el diseño automático.

En este trabajo consideramos mecanismos flexibles constituidos por cuerpos rígidos vinculados por vigas cumpliendo el rol de flexores (Hopkins, 2010). El problema a resolver es: dado un espacio de libertades o movimientos, se desea calcular e implementar físicamente el espacio de restricciones agregando sucesivamente elementos de viga representados por helicoides de fuerzas puras. Esto no siempre puede realizarse y su explicación no siempre es trivial o intuitiva. En trabajos recientes de los autores (Pucheta et al., 2016; Pucheta y Gallardo, 2017) se han implementado mecanismos flexibles de 3 grados de libertad diseñados con una metodología similar a la FACT, con la contribución de ser validados numéricamente mediante análisis lineal estático por elementos finitos. En el presente trabajo, el objetivo es estudiar exhaustivamente el significado geométrico de la implementación física del espacio de restricciones utilizando flexores de viga en forma iterativa utilizando el método denominado *Diseño Basado en Restricciones*. De este modo, se interpretan también los resultados que se obtienen con los métodos basados en álgebra lineal y otros métodos que descomponen el espacio de restricciones en forma numérica (Su et al., 2009a). En este trabajo se explica por qué algunos espacios de restricción no son físicamente realizables con flexores de viga y ésta es la contribución original del trabajo.

El objetivo a largo plazo, es automatizar el diseño de mecanismos flexibles e incorporar la optimización de las dimensiones de los flexores para obtener, principalmente, un comportamiento específico de exactitud, satisfacer restricciones de diseño y funcionales, entre otros.

En la Sección 2 se presentan los antecedentes en el método basado en restricciones, principalmente, las contribuciones de Maxwell y Blanding. En la Sección 3 se describe la nomenclatura y convención de colores para representar los helicoides. En la Sección 4 se presenta el estudio de todos los casos de diseño para todos los grados de libertad posible. Finalmente, se detalla una

contrastación de resultados con trabajos similares y se discute por qué no pueden construirse algunos casos particulares.

## 2. MÉTODO BASADO EN RESTRICCIONES

Este método fue introducido por Maxwell y definido para el diseño de máquinas de precisión por Blanding (Su et al., 2009a).

### 2.1. Regla de Maxwell

Esta regla define matemáticamente la relación entre los grados de libertad y el número de restricciones no redundantes de un cuerpo. Un cuerpo rígido sin ninguna restricción tiene seis grados de libertad (Fig. 1), tres traslaciones y tres rotaciones, que por conveniencia se eligen que sean ortogonales.

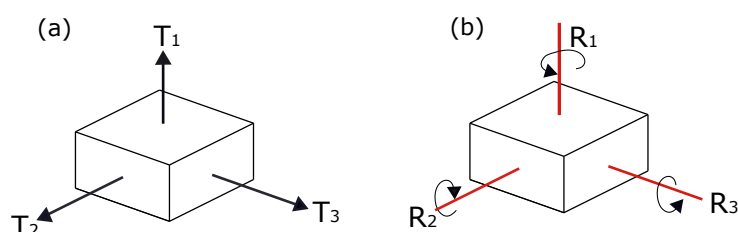


Figura 1: Grados de libertad: (a) tres traslaciones; (b) tres rotaciones.

Una restricción que se impone a un cuerpo, limita su movimiento a una dirección particular. Por cada restricción no redundante que se le agrega a un cuerpo se remueven grados de libertad (Ec. 1),

$$6 - C = N \quad (1)$$

donde  $N$  es el número de grados de libertad del cuerpo y  $C$  el número de restricciones no redundantes.

### 2.2. Reglas de Blanding

Blanding define una viga esbelta como una restricción ideal (Blanding, 1999), la cual tiene una rigidez infinita en dirección de la línea de restricción y una flexibilidad infinita en la dirección perpendicular a la línea de restricción (Fig. 2 (a)), este modelo es acertado para pequeños desplazamientos del extremo de la viga.

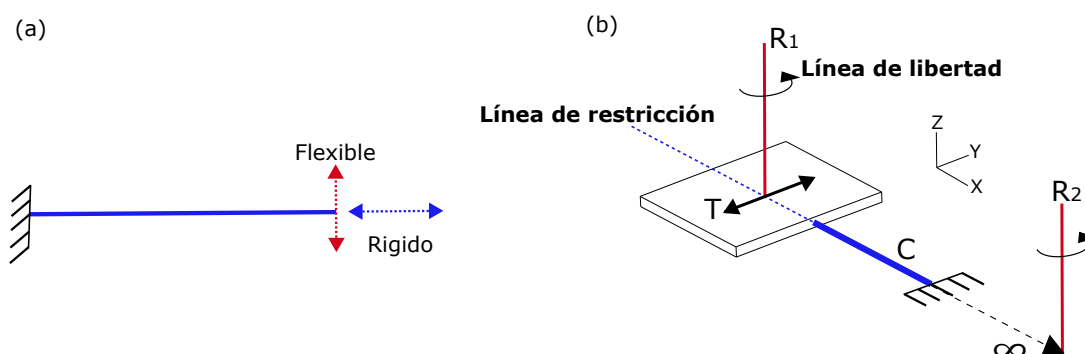


Figura 2: (a) Viga esbelta, equivalente a una restricción ideal; (b) Movimiento plano de un cuerpo con una restricción de viga.

Un cuerpo con movimiento en el plano (Fig. 2(b)) tiene tres grados de libertad, dos traslaciones y una rotación. Al conectar el cuerpo con una viga a un punto de referencia se le está aplicando una restricción  $C$ . Como la viga posee rigidez infinita a lo largo de la línea de restricción impide la traslación del cuerpo a lo largo de la misma. Esta observación determina una de las reglas de Blanding:

*“Un punto de un cuerpo a lo largo de la línea de restricción sólo puede moverse perpendicularmente a la línea de restricción, y no a lo largo de ella”.*

Como consecuencia, dos restricciones (vigas) ubicadas a lo largo de la misma línea de restricción son equivalentes, es decir, son redundantes. Esto es válido únicamente por hipótesis de pequeños desplazamientos.

Los movimientos permitidos del cuerpo (Fig. 2 (b)) son una traslación ( $T$ ) y una rotación ( $R_1$ ). Toda traslación puede ser representada por una rotación, cuyo eje se ubica en el infinito y con una orientación perpendicular al movimiento de la traslación. Por lo que ( $R_2$ ) es equivalente a ( $T$ ).

Blanding estableció que cada grado de libertad de un cuerpo puede ser representado por una rotación y llamó a cada eje de rotación “Línea de libertad”. La regla de los patrones complementarios de Blanding define la relación entre los grados de libertad y las restricciones:

*“Cada línea de libertad intersecta a cada línea de restricción”.*

Esta regla también contempla el caso en el que el punto de intersección se encuentre en el infinito, es decir, que la línea de libertad sea paralela a la línea de restricción.

### 3. TEORÍA DE HELICOIDES PARA MECANISMOS FLEXIBLES

Un helicoide, denotado por  $\$$ , es un vector de dimensión seis, compuesto por dos vectores de tres dimensiones  $\$ = (s; s^0)$ .

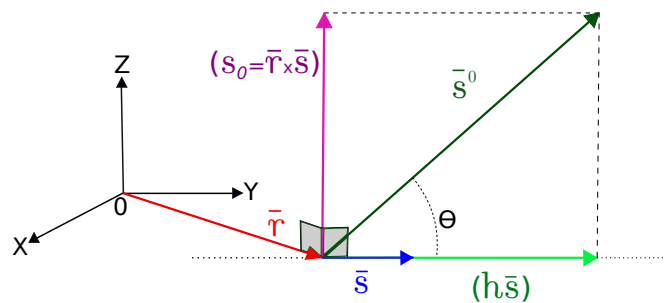


Figura 3: Helicoide definido por una línea  $(s, s_0)$  y un paso  $h$

En la Fig. 3 se encuentran representados dichos vectores, donde  $s$  es el vector dirección del eje del helicoide y  $s^0$  es la suma de dos vectores:

- (a)  $s_0 = r \times s$ : el momento del vector  $s$  con respecto al marco de referencia  $O-XYZ$ .
- (b)  $hs$ : producto del vector dirección con el escalar  $h$ , denominado paso del helicoide.

Entonces, un helicoide queda definido por tres parametros: (i) el vector dirección  $s$ , (ii) el vector posición  $r$ , y (iii) el escalar  $h$  denominado paso.

Cuando el valor del paso es cero, el helicoide representa una línea en el espacio.

#### 3.1. Helicoide de movimiento y helicoide de fuerza

De acuerdo al Teorema de Chasles (Angeles, 1988, p. 28), todo desplazamiento de un cuerpo rígido en el espacio es la composición de una rotación alrededor de un eje y de una traslación

a lo largo del mismo eje. En otras palabras, cualquier movimiento en el espacio puede ser representado por un helicoides de movimiento (*Twist*). En el caso de los mecanismos flexores esto es válido para desplazamientos infinitesimales.

El helicoides de desplazamiento infinitesimal (*Twist*) se define como

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \Delta\theta \\ \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta\theta \\ \mathbf{c} \times \Delta\theta + p\Delta\theta \end{bmatrix} \quad (2)$$

donde  $\Delta\theta$  es un vector de desplazamientos rotacionales que apunta en la dirección del helicoides y  $\delta$  es el desplazamiento lineal,  $\mathbf{c}$  es el vector de localización que va desde el origen hasta cualquier punto a lo largo del eje del helicoides y  $p$  es el paso del helicoides que determina la relación entre la rotación y el desplazamiento existente en el movimiento. Existen dos casos especiales: (i)  $p = 0$  existe rotación pura y (ii)  $p = \infty$  existe traslación pura.

Rotación pura ( $p = 0$ ):  $\mathbf{T}_0 = (\Delta\theta \mid \mathbf{c} \times \Delta\theta)$

Traslación pura ( $p = \infty$ ):  $\mathbf{T}_\infty = (\mathbf{0} \mid p\Delta\theta)$

La fuerza y el momento, al igual que la rotación y traslación, puede ser representado por un helicoides. El helicoides de fuerza/momento (*Wrench*) definido como:

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \boldsymbol{\tau} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{r} \times \mathbf{f} + q\mathbf{f} \end{bmatrix} \quad (3)$$

donde  $\mathbf{f}$  es un vector de fuerza que apunta en la dirección del helicoides y  $\boldsymbol{\tau}$  representa el momento del helicoides alrededor del origen del sistema coordenado,  $\mathbf{r}$  es el vector de localización que va desde el origen hasta cualquier punto a lo largo del eje del helicoides y  $q$  es el paso del helicoides que determina la relación entre la fuerza y el momento. Existen dos casos especiales: (i)  $q = 0$  existe una fuerza pura y (ii)  $q = \infty$  existe un momento puro.

Fuerza pura ( $q = 0$ ):  $\mathbf{W}_0 = (\mathbf{f} \mid \mathbf{r} \times \mathbf{f})$

Momento puro ( $q = \infty$ ):  $\mathbf{W}_\infty = (\mathbf{0} \mid q\mathbf{f})$

### 3.2. Producto recíproco

El trabajo virtual de una fuerza  $\mathbf{W}$  sobre un cuerpo con un movimiento  $\mathbf{T}$  es definido por el producto recíproco del helicoides de fuerza y del helicoides de movimiento.

$$\mathbf{W} \circ \mathbf{T} = \mathbf{f} \cdot \delta + \boldsymbol{\tau} \cdot \Delta\theta. \quad (4)$$

Un helicoides de movimiento es recíproco a un helicoides de fuerza cuando su producto recíproco es cero. Los casos de reciprocidad son:

1.  $\mathbf{f} = \mathbf{0}$  ( $q = \infty$ ) y  $\Delta\theta = \mathbf{0}$  ( $p = \infty$ ). Un momento puro es siempre recíproco a una traslación pura, es decir no producen trabajo.
2.  $\mathbf{f} \neq \mathbf{0}$  y  $\Delta\theta = \mathbf{0}$ . Para satisfacer la condición de reciprocidad  $\mathbf{f}$  debe ser perpendicular a  $\delta$ . De igual manera para  $\mathbf{f} = \mathbf{0}$  y  $\Delta\theta \neq \mathbf{0}$ ,  $\Delta\theta$  debe ser perpendicular a  $\boldsymbol{\tau}$ .

3.  $\mathbf{f} \neq \mathbf{0}$  ( $q \neq \infty$ ) y  $\Delta\theta \neq \mathbf{0}$  ( $p \neq \infty$ ). Para estas condiciones es conveniente desarrollar la Ec. (4) como

$$\begin{aligned} \mathbf{W} \circ \mathbf{T} &= [\mathbf{f} \cdot (\mathbf{c} \times \Delta\theta + p\Delta\theta) + (\mathbf{r} \times \mathbf{f} + q\mathbf{f}) \cdot \Delta\theta] \\ &= [(\mathbf{f} \cdot \Delta\theta)(q + p) + (\Delta\theta \times \mathbf{f}) \cdot (\mathbf{c} - \mathbf{r})] \\ &= |\mathbf{f}| |\Delta\theta| [(q + p) \cos(\alpha) - d \sin(\alpha)] \end{aligned} \quad (5)$$

donde  $\alpha$  es el ángulo entre los helicoides y  $d = |\mathbf{c} - \mathbf{r}|$ , es la distancia normal entre ambos. Para que se cumpla la condición de reciprocidad el término entre corchetes debe ser cero, es decir:  $q + p = \tan(\alpha)d$ . Luego, existen dos casos especiales:

- Cuando  $q + p = 0$ , los ejes de los helicoides deben ser paralelos ( $\alpha = 0$ ) ó concurrentes ( $d = 0$ ). La condición necesaria para la reciprocidad es que los ejes deben ser coplanares.
- Cuando los ejes de los helicoides son perpendiculares ( $\cos(\alpha) = 0$ ) la distancia  $d$  debe ser cero. En este caso, los helicoides serán recíprocos para cualquier valor de paso.

### 3.3. Espacio de libertad y espacio de restricción

Los movimientos que puede tener un cuerpo en el espacio son representados por helicoides de desplazamiento (*twist*). El espacio de libertad está conformado por todos los helicoides de desplazamientos linealmente independientes y expresado de forma matricial como

$$[\mathbf{T}] = [\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \dots, \mathbf{T}_N]; \quad (6)$$

donde  $N$  determina la dimensión del espacio de libertad y los helicoides  $\mathbf{T}_i$  son los vectores bases del espacio de libertad, por lo tanto, cualquier movimiento permitido del cuerpo puede expresarse como combinación lineal de los  $\mathbf{T}_N$ .

El espacio de restricciones está formado por los helicoides de fuerza de restricción linealmente independientes que impiden ciertos movimientos del cuerpo y, al igual que el espacio de libertad, es expresado de forma matricial como

$$[\mathbf{W}] = [\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2, \dots, \mathbf{W}_{6-N}]. \quad (7)$$

La dimensión del espacio de restricción está en función de la dimensión del espacio de libertad (o viceversa) de acuerdo a la Ec. (1). Cualquier restricción que pueda expresarse como combinación lineal de los vectores  $\mathbf{W}_j$  es una restricción redundante.

La definición de un helicoides recíproco a otro puede ser extendida a sistemas de helicoides. Un sistema de helicoides  $[\mathbf{T}]$  es recíproco a otro sistema de helicoides  $[\mathbf{W}]$  si el producto recíproco de cada uno de sus helicoides es cero. El trabajo virtual de cualquier fuerza de restricción actuante sobre un cuerpo con desplazamiento compatible a sus grados de libertad es nulo

$$[\mathbf{W}] \circ [\mathbf{T}] = 0. \quad (8)$$

Los elementos flexores son los que imponen restricciones al cuerpo, en este trabajo sólo se utilizarán flexores de vigas definidos en la Sección 2.2. Una sola viga restringe un desplazamiento en la dirección de su eje, por lo que este elemento sólo aplica fuerza sobre el cuerpo en la dirección del desplazamiento que impide. En otras palabras, los helicoides de restricción serán helicoides de fuerza pura (de paso nulo),  $\mathbf{W}_i = [\mathbf{f} \mid \mathbf{r} \times \mathbf{f}]^T$ .

N	caso	sub-caso
1	R	1) $R_x$
	T	2) $T_x$
2	RR	3) $R_x \cdot R_y$
	RT	4) $R_x \cdot T_x$
		5) $R_x \cdot T_z$
	TT	6) $T_y \cdot T_z$
3	RRR	7) $R_x \cdot R_y \cdot R_z$
	RRT	8) $R_x \cdot R_y \cdot T_x$
		9) $R_x \cdot R_y \cdot T_z$
	RTT	10) $R_x \cdot T_x \cdot T_y$
		11) $R_x \cdot T_y \cdot T_z$
	TTT	12) $T_x \cdot T_y \cdot T_z$
4	RRRT	13) $R_x \cdot R_y \cdot R_z \cdot T_x$
	RRTT	14) $R_x \cdot R_y \cdot T_x \cdot T_y$
		15) $R_x \cdot R_y \cdot T_x \cdot T_z$
	RTTT	16) $R_x \cdot T_x \cdot T_y \cdot T_z$
5	RRRTT	17) $R_x \cdot R_y \cdot R_z \cdot T_x \cdot T_y$
	RRTTT	18) $R_x \cdot R_y \cdot T_x \cdot T_y \cdot T_z$

Tabla 1: Combinación de grados de libertad, solo traslaciones y rotaciones.

#### 4. DISEÑO DE MECANISMOS FLEXIBLES

Sin importar qué método de diseño se utilice, primero se deben definir los grados de libertad deseados y con ello calcular las restricciones necesarias o viceversa. Si se parte de los grados de libertad, existen 33 combinaciones posibles de movimientos, donde 18 combinaciones consideran rotación pura (R) y traslación pura (T) como se muestra en la Tabla 1. Luego, se obtienen 15 combinaciones más si se utilizan movimientos de helicoides (H), ver Tabla 2.

El elemento flexor de viga impide una traslación, por lo que un mecanismo flexible paralelo con tres grados de libertad de traslación es imposible. En consecuencia, mecanismos flexibles paralelos de los subcasos 12, 16, 18 de la Tabla 1 no pueden ser construidos. A continuación se comprobará qué mecanismos con  $N$  grados de libertad puede ser construidos. Para ello se utilizará el método basado en restricciones y la teoría de helicoides. En términos de helicoides se tratará de comprobar la existencia del espacio recíproco constituido únicamente por helicoides de fuerzas puras (líneas) del espacio de libertad.

Para la representación gráfica de los tipos de movimientos y de restricción se utilizará el mismo código de colores que empleó Hopkins (2010) como se muestra en la Fig. (4).



Figura 4: Representación gráfica del tipo de movimiento y de restricción.

N	caso	sub-caso
1	H	1) $H_x$
2	HH	2) $H_y \cdot H_z$
	HT	3) $H_y \cdot T_z$
	HR	4) $H_y \cdot R_z$
3	HHH	5) $H_x \cdot H_y \cdot H_z$
	HHR	6) $H_y \cdot H_z \cdot R_x$
	HHT	7) $H_y \cdot H_z \cdot T_x$
	HTR	8) $H_y \cdot T_x \cdot R_z$
		9) $H_y \cdot T_z \cdot R_z$
	HRR	10) $H_x \cdot R_y \cdot R_z$
	HTT	11) $H_x \cdot T_y \cdot T_z$
4	HHRT	12) $H_y \cdot H_z \cdot R_x \cdot T_x$
	HRRT	13) $H_x \cdot R_y \cdot R_z \cdot T_z$
	HRTT	14) $H_x \cdot R_y \cdot T_y \cdot T_z$
5	HRRTT	15) $H_x \cdot R_y \cdot R_z \cdot T_y \cdot T_z$

Tabla 2: Combinación de grados de libertad incluyendo helicoides

#### 4.1. Mecanismos flexibles con grados de libertad de traslación y/o rotación

En esta subsección se analizan las construcciones de los subcasos de la Tabla 1, excluyendo los subcasos 12, 16, 18 que no pueden ser construidos y el 17 que se explicará en la siguiente subsección.

##### 4.1.1. Grado de libertad: 1 Rotación

Dado un cuerpo, se desea que tenga una rotación cuyo eje sea coincidente con una de sus aristas (Fig. 5(a)). De acuerdo a la regla de Maxwell son necesarias cinco restricciones, y de acuerdo a la regla de Blanding, las líneas de restricción deben ser concurrentes o paralelas a la línea de rotación.

Primero se deben restringir las tres traslaciones. Ello se logra con tres flexores de viga,  $C_1$ ,  $C_2$  y  $C_3$ , concurrentes a un punto y perpendiculares entre ellos. El punto de concurrencia debe hallarse sobre el eje de rotación del movimiento deseado  $R_x$ , ver Fig. 5(a).

Para restringir una rotación con elementos flexores de viga son necesarios dos flexores paralelos como se muestra en la Fig. 5(b). Para que exista una rotación perpendicular al plano formado por los dos flexores, es necesario que uno de ellos se comprima y el otro se traccione. Por definición, estos flexores tienen rigidez infinita en la dirección de su eje, por lo que esa rotación es restringida.

Las rotaciones que deben ser restringidas en este caso son:  $R_z$  y  $R_y$ . Ello se logra con las restricciones  $C_4$  y  $C_5$ , respectivamente; como muestra la Fig. 5(c) ambas son paralelas a  $C_1$ .

Aplicando la teoría de helicoides, primero se define el espacio de libertad y con ello se calcula el espacio recíproco que es el espacio de restricción, ver Tabla 3. Una rotación es representada por un helicoides  $\$1$  con paso  $p$  igual a cero. Geométricamente, este helicoides representa una línea en el espacio y toda línea es recíproca a sí misma o simplemente, es autorecíproca. Por lo tanto,  $\$1$  pertenece al espacio recíproco y equivale a una fuerza pura paralela al eje de rotación.

El espacio de restricción debe ser de dimensión 5. Para calcular el resto de los helicoides de



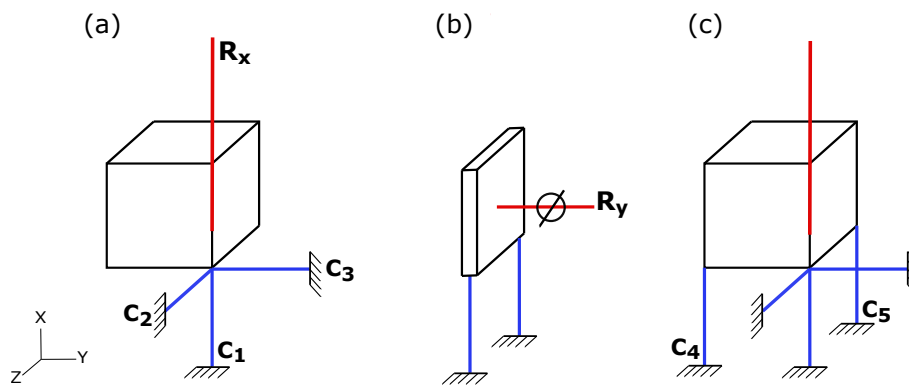


Figura 5: Construcción de un mecanismo flexor con un grado de libertad de rotación.

		Espacio de Restricción				
Espacio de libertad		$\$1$	$\$2$	$\$3$	$\$4$	$\$5$
	$\$1 = [1, 0, 0   0, 0, 0]^T$	//	X	X	//	//

Tabla 3: Espacio de libertad y espacio de restricción de una rotación.

restricción se utiliza la Ec. (4), siendo este uno de los casos especiales ( $p + q = 0$ ). Es decir, que los ejes de los helicoides restrictivos deben ser paralelos ( // ) o concurrentes ( X ) al eje del helicoides de libertad.

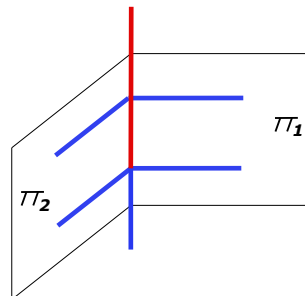


Figura 6: Representación geométrica de una rotación y sus restricciones.

Una forma sencilla de obtener el espacio de restricción de una rotación es considerar 2 planos que intersectan y elegir 5 rectas linealmente independientes contenidas en los mismos. En un plano solo pueden existir tres rectas independientes. La recta de intersección de los planos es el eje de rotación  $\$1$  y también puede ser considerado una restricción, ver Fig. (6).

#### 4.1.2. Grado de libertad: 1 Traslación

Toda traslación puede ser interpretada como una rotación en el infinito, siendo el eje de rotación perpendicular a la traslación. La Fig. 7 (a) muestra esta equivalencia y el mecanismo puede ser diseñado de igual manera que en el caso de una rotación. Se buscan 5 restricciones que sean paralelas o concurrentes al eje de rotación, dando como resultado 5 restricciones perpendiculares a la traslación. En este caso, se eligió el eje de rotación deseada con dirección  $Z$  por simplicidad, pero eligiendo cualquier otro eje contenido en un plano perpendicular a la traslación (Fig. 7 (b)) conduce al mismo resultado.

Considerando la teoría de helicoides, se debe calcular el espacio recíproco del espacio de libertad de una traslación. En el caso de la rotación, el helicoides de rotación pertenecía al espacio

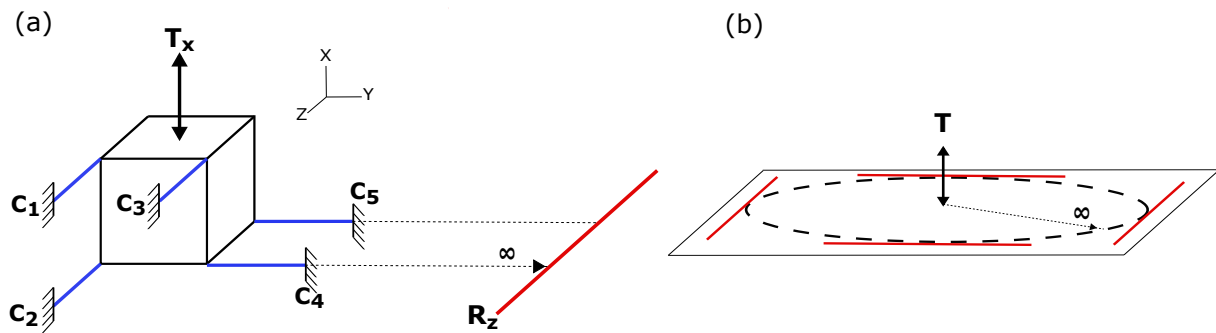


Figura 7: (a) Sistema flexor con una traslación; (b) Equivalencia entre una traslación y una rotación en el infinito.

recíproco por ser autorecíproco. En este caso, el helicoides de traslación  $\$1 = [0, 0, 0 | 1, 0, 0]^T$  es autorecíproco, pero no puede formar parte del espacio recíproco debido a que el helicoides tiene paso infinito. Los helicoides del espacio recíproco deben ser perpendiculares a la traslación de acuerdo al segundo caso especial de la Ec. (4),  $f \neq 0$  y  $\Delta\theta = 0$ , como se muestra en la Tabla 4.

Espacio de libertad	$\$1 = [0, 0, 0   1, 0, 0]^T$	Espacio de Restricción				
		$\$2$	$\$3$	$\$4$	$\$5$	$\$6$
		$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$

Tabla 4: Espacio de libertad y espacio de restricción de una traslación.

Para el caso equivalente mostrado en la Fig. 7 (b) en que la traslación se obtiene mediante un helicoides de rotación perpendicular a la traslación, los helicoides recíprocos a la rotación se deben elegir sobre dos planos que intersectan sobre dicho eje de rotación (Fig. 8 (a)). Si dicho eje de rotación está a una distancia infinita del eje de traslación deseada, la intersección de los planos tenderá al infinito, es decir serán paralelos. Recordando que la traslación es equivalente a una rotación en el infinito, el modo sencillo de calcular el espacio recíproco de un helicoides de traslación es hallar 5 rectas linealmente independientes sobre dos planos paralelos y perpendiculares a la traslación (Fig. 8(b)).

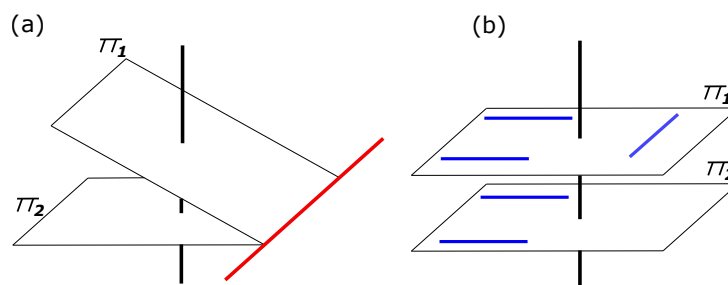


Figura 8: (a) Representación geométrica de una rotación y una traslación; (b) Representación geométrica de una traslación y sus restricciones.

#### 4.1.3. Grados de libertad: 2 Rotaciones

Dos ejes de rotación en el espacio pueden tener tres disposiciones diferentes:

1. Concurrentes, Fig. 9 (a).

2. Paralelos, Fig. 9 (b).

3. No concurrentes, no paralelos, Fig. 9 (c).

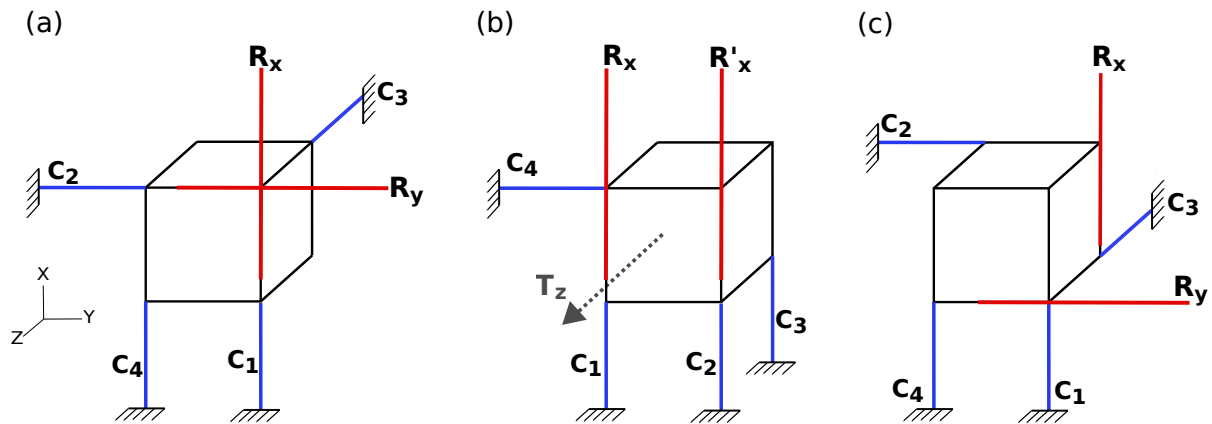


Figura 9: Casos de sistemas flexores con dos rotaciones: (a) Ejes de rotación concurrentes; (b) Ejes de rotación paralelos; (c) Ejes de rotación no coplanares.

El espacio de libertad está formado por dos helicoides de rotaciones. En el caso de que sean coplanares (ya sean concurrentes o paralelos) además de ser autorecíprocos, son recíprocos entre ellos. Por lo tanto, el espacio de libertad forma parte del espacio recíproco. De esta manera ya se definen dos restricciones que son coplanares,  $C_1$  y  $C_2$ . Una tercera restricción  $C_4$  puede definirse en el mismo plano sólo si es linealmente independiente a las demás. La última restricción,  $C_3$ , no debe ser coplanar a las demás, y a la vez, debe pasar por el punto de concurrencia de los ejes de las rotaciones deseadas. Nótese que  $C_3$  concurre en un punto finito en la Fig. 9 (a) y en el infinito para la Fig. 9 (b). Los helicoides para los espacios de libertad y restricción se muestran en la Tabla 5.

		Espacio de Restricción			
Espacio de libertad		$\$1$	$\$2$	$\$3$	$\$4$
	$\$1 = [1, 0, 0 0, 0, 0]^T$	//	X	X	//
	$\$2 = [0, 1, 0 0, 0, 0]^T$	X	//	X	X

Tabla 5: Dos rotaciones concurrentes.

Los helicoides de dos rotaciones paralelas mostrados en la Tabla 6 pueden combinarse de manera tal de obtener un helicoide de rotación  $\$1 = [1, 0, 0|0, 0, 0]^T$  y un helicoide de traslación  $\$2' = [0, 0, 0|0, 0, 1]^T$ . El espacio de libertad de dos rotaciones paralelas es equivalente al espacio de una rotación y una traslación perpendicular al plano formado por los ejes de las rotaciones. Las restricciones deben ser siempre perpendiculares a la dirección de la traslación y eso se verifica en la Fig. 9 (b).

Cuando los ejes de las rotaciones no son concurrentes o paralelos, son no coplanares. Al no ser coplanares los helicoides de rotación no son recíprocos entre ellos, por lo que el espacio de libertad no formará parte del espacio recíproco. Se deben seleccionar cuatro restricciones, las cuales deben ser concurrentes a ambos helicoides o ser concurrentes a uno de ellos y paralelo al otro; ver Tabla 7.

		Espacio de Restricción			
Espacio de libertad		$\$1$	$\$2$	$\$3$	$\$4$
	$\$1 = [1, 0, 0   0, 0, 0]^T$	//	//	//	X
	$\$2 = [1, 0, 0   0, 0, 1]^T$	//	//	//	X

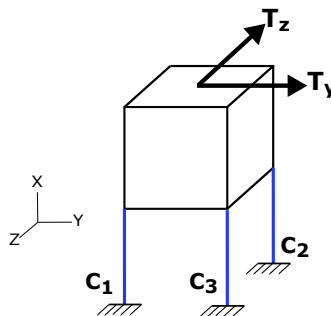
Tabla 6: Dos rotaciones paralelas.

		Espacio de Restricción			
Espacio de libertad		$\$3$	$\$4$	$\$5$	$\$6$
	$\$1 = [1, 0, 0   0, 0, 0]^T$	//	X	X	//
	$\$2 = [0, 1, 0   1, 0, 0]^T$	X	//	X	X

Tabla 7: Dos rotaciones no coplanares.

#### 4.1.4. Grados de libertad: 2 Traslaciones

Para diseñar un mecanismo con 2 traslaciones se deben hallar 4 restricciones perpendiculares a la dirección de ambos desplazamientos. Dos traslaciones generan un plano sobre el cual puede desplazarse un cuerpo, por lo tanto, las restricciones deben ser perpendiculares a dicho plano.

Figura 10: Sistema flexor con dos traslaciones y una rotación  $R_x$ .

En el espacio sólo pueden existir 3 rectas paralelas linealmente independientes, entonces sólo 3 restricciones no redundantes pueden ser perpendiculares al plano de desplazamiento. En este caso, no se cumple la Ec. (1) y en consecuencia este mecanismo no puede ser construido.

Las tres restricciones, al ser paralelas, impiden el desplazamiento en  $X$ . Las restricciones  $C_1$  y  $C_3$  impiden la rotación en torno del eje  $Z$ , mientras que  $C_3$  y  $C_2$  impiden la rotación en torno del eje  $Y$ . El mecanismo de la Fig. 10 permite el desplazamiento en la dirección  $Y$  y  $Z$ , y permite la rotación en torno del eje  $X$ .

#### 4.1.5. Grados de libertad: 1 Rotación - 1 Traslación

Un helicoides de rotación y un helicoides de traslación siempre pueden considerarse contenidos en un plano debido a que el helicoides de traslación es un vector libre. Considerando un caso general como el de la Fig. 11(a), donde existe un ángulo  $\alpha$  entre ellos, las cuatro restricciones deben ser perpendiculares a la dirección del desplazamiento y concurrentes al eje de rotación. Sólo dos restricciones perpendiculares al plano y que intersecten al eje de rotación pueden formar parte del espacio recíproco. Las otras dos deben ser paralelas entre sí, pertenecer al plano mencionado y ser perpendiculares a la dirección de traslación.

Si  $\alpha = \pi/2$ , se obtiene el caso de dos rotaciones paralelas como el que se mostró en la Fig. 9 (b), y si  $\alpha = 0$  todas las restricciones deben ser concurrentes y perpendiculares ( $X_{\perp}$ ) al eje de rotación, como se muestra en la Fig. 11 (b) y en los helicoides de la Tabla 11.

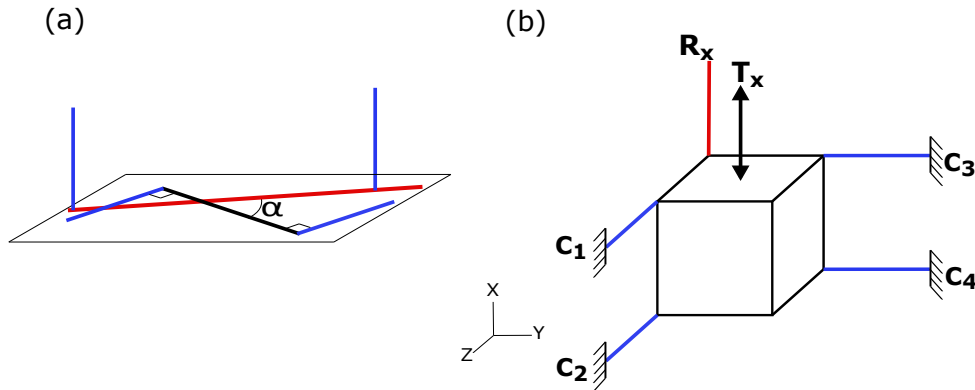


Figura 11: Sistema flexor con una traslación y una rotación: (a) Disposición general de eje de rotación y dirección de traslación; (b) Eje de rotación paralela a la traslación.

		Espacio de Restricción			
Espacio de libertad		$\$3$	$\$4$	$\$5$	$\$6$
	$\$1 = [1, 0, 0   0, 0, 0]^T$	$X_{\perp}$	$X_{\perp}$	$X_{\perp}$	$X_{\perp}$
	$\$2 = [0, 0, 0   1, 0, 0]^T$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$

Tabla 8: Una rotación  $R_x$  y una traslación  $T_x$ .

#### 4.1.6. Grados de libertad: 3 Rotaciones

Cuando los ejes de las tres rotaciones son concurrentes a un punto como se muestra en la Fig. 12 (a), los helicoides de rotación son recíprocos entre ellos. En consecuencia, los helicoides que representan al espacio de libertad son los mismos que representan al espacio de restricción, ver Tabla. 9.

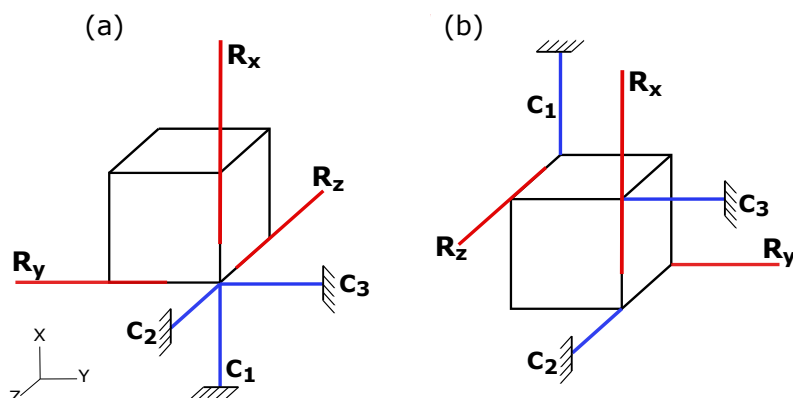


Figura 12: Sistema flexor con tres rotaciones: (a) Tres rotaciones concurrentes; (b) Tres rotaciones no coplanares.

Si los tres ejes de rotación no son ni concurrentes, ni paralelos como en la Fig. 12 (b), las restricciones deben ser concurrentes a dos ejes y paralelos al eje restante. De esta manera se cumple la condición de reciprocidad.

		Espacio de Restricción		
Espacio de libertad		$\$1$	$\$2$	$\$3$
	$\$1 = [1, 0, 0   0, 0, 0]^T$	//	X	X
	$\$2 = [0, 1, 0   0, 0, 0]^T$	X	//	X
	$\$3 = [0, 0, 1   0, 0, 0]^T$	X	X	//

Tabla 9: Tres rotaciones concurrentes.

#### 4.1.7. Grados de libertad: 2 Rotaciones - 1 Traslación

La disposición relativa entre los ejes de rotación y la traslación pueden ser básicamente dos: (i) dos ejes de rotación concurrentes y una traslación; (ii) dos ejes de rotación no coplanares y una traslación.

En el caso (i), se considera un plano que contenga a las dos rotaciones. Se busca otro plano que sea perpendicular al anterior y que contenga al vector desplazamiento; ver Fig. 13 (a). Toda restricción que esté contenida en el plano de las rotaciones será recíproca a las dos rotaciones. Además, para ser recíproca a la traslación, la restricción debe ser perpendicular al plano que contiene a dicha traslación. Sólo dos restricciones paralelas entre ellas cumplen esas condiciones. La tercera restricción para completar el espacio recíproco debe pasar por el punto de concurrencia de las rotaciones y ser perpendicular a la traslación.

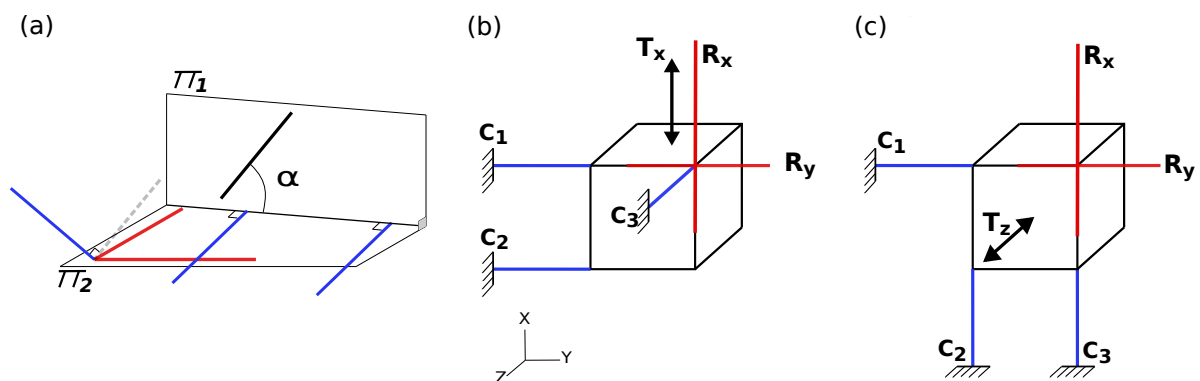


Figura 13: Sistema flexor con dos rotaciones y una traslación. (a) Disposición general de los ejes de rotación y dirección de traslación (b) Traslación contenida en el plano formado por las rotaciones (c) Traslación perpendicular al plano formado por las rotaciones.

En el caso (ii), se considera un plano en el cual está contenida una rotación y la traslación. La traslación forma un ángulo con cualquiera de los dos ejes de rotación. Como la traslación es un vector libre, el plano estará formado por aquel en el que el ángulo es menor. Sin perder generalidad, la segunda rotación se halla en un plano paralelo a cierta distancia como se muestra en la Fig. 14 (a).

El sistema flexor con dos rotaciones no coplanares y una traslación podrá ser construido únicamente si uno de los ejes de rotación es perpendicular a la dirección de la traslación.

El espacio recíproco debe estar formado por tres helicoides de restricciones. Siguiendo a la Fig. 14 (a), sólo una restricción perpendicular al plano  $\pi_1$  puede ser concurrente a ambos ejes de rotaciones, las otras dos restricciones deben ser concurrentes a un eje de rotación y paralela al otro eje de rotación, además de ser perpendiculares a la dirección de la traslación. Suponiendo que estas restricciones son concurrentes a la rotación contenida en el plano  $\pi_1$ , deben ser paralelas a la otra rotación. La única manera de que sean perpendiculares a la dirección de la

traslación es que esta misma sea perpendicular al eje de rotación contenido en el plano  $\pi_2$ .

En la Fig. 14(b) se tiene una traslación paralela al eje  $R_y$  y perpendicular al eje  $R_x$ , por lo tanto el mecanismo tiene construcción. En un plano  $xy$  ( $\pi_1$ ) se encuentran contenidas  $T_y$  y  $R_y$ , y en otro plano paralelo ( $\pi_2$ ) se halla  $R_x$ .

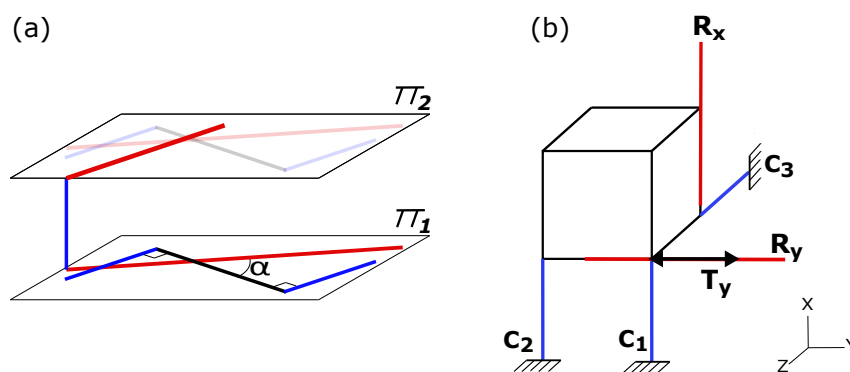


Figura 14: Sistema flexor con dos rotaciones no coplanares y una traslación: (a) Disposición general de los ejes de rotación y dirección de traslación; (b) Traslación perpendicular a uno de los ejes de rotación.

#### 4.1.8. Grados de libertad: 1 Rotación - 2 Traslación

La dos traslaciones siempre se hallan en un plano ( $\pi_1$ ) denominado plano de traslaciones, el eje de rotación puede tener cualquier disposición respecto a dicho plano; ver Fig. 15 (a).

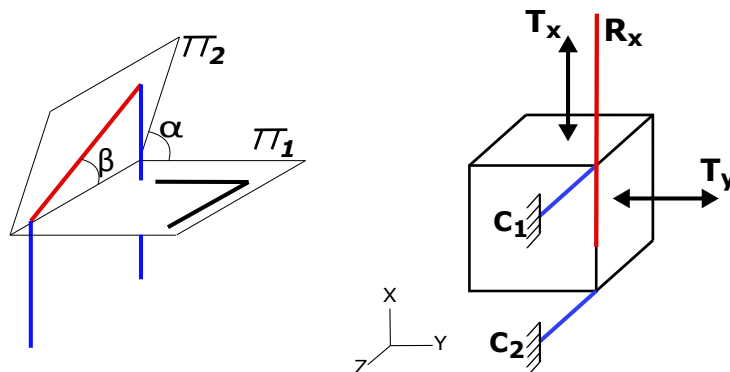


Figura 15: Sistema flexor con dos traslaciones y una rotación. (a) Disposición general del eje de rotación con respecto al plano de traslación (b) Rotación coplanar al plano de traslación.

El espacio recíproco debe estar conformado por 3 restricciones perpendiculares al plano de traslación y concurrentes al eje de rotación. Únicamente 2 restricciones pueden cumplir esas condiciones, por lo que el mecanismo no puede ser construido debido al faltante de una restricción. Existe un caso particular, cuando el eje de rotación es perpendicular al plano  $\pi_1$ , en el cual el espacio recíproco estará formado por tres restricciones paralelas al eje de rotación y por ende perpendiculares al plano de traslación. Este es el caso visto en dos traslaciones y ejemplificado en la Fig. 10.

#### 4.1.9. Grados de libertad: 3 Rotaciones - 1 Traslación

Dada tres rotaciones concurrentes y una traslación, el espacio recíproco debe estar formado por dos restricciones concurrentes al punto de concurrencia de los ejes de rotación y además

deben estar contenidas en un plano perpendicular a la dirección de traslación, ver Fig 16 (a).

En el caso de que las rotaciones no sean coplanares, la dirección de la traslación debe ser paralela a uno de los ejes de rotación. De esta forma existen dos restricciones pertenecientes al espacio recíproco.

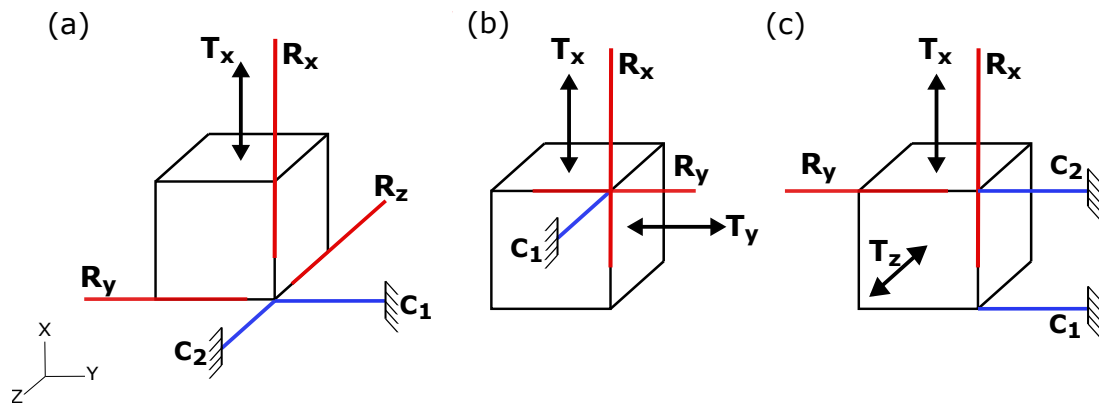


Figura 16: Sistema flexor con cuatro grados de libertad: (a) Tres rotaciones y una traslación; (b) Dos rotaciones y dos traslaciones, plano de rotaciones paralelo al plano de traslación; (c) Dos rotaciones y dos traslaciones, plano de rotaciones perpendicular al plano de traslación.

#### 4.1.10. Grados de libertad: 2 Rotaciones - 2 Traslaciones

Dos rotaciones concurrentes siempre se hallan en un plano, de igual manera que las dos traslaciones. Para que las restricciones sean recíprocas a las rotaciones deben ser coplanares a éstas, y para ser recíprocas a las traslaciones deben ser perpendiculares a las mismas. La única forma de que el sistema recíproco esté formado por dos restricciones, es que el plano de rotaciones sea perpendicular al plano de traslación. El caso Fig 16 (b) no puede construirse y el caso Fig 16 (c) sí.

Si las dos rotaciones no son coplanares, la condición necesaria para la existencia de restricciones recíprocas al espacio de libertad es que, uno de los ejes de rotación sea perpendicular al plano de las traslaciones y el otro eje de rotación sea coplanar.

#### 4.2. Mecanismos flexibles con grados de libertad de helicoides

En esta subsección se analizan los subcasos de la Tabla 2.

##### 4.2.1. Grados de libertad: 1 Helicoide

La combinación de dos rotaciones no coplanares da como resultado un helicoides (Blanding, 1999). Este helicoides se hallará a una distancia  $d$  de uno de los ejes de rotación y perpendicular a la recta normal a los dos ejes de rotaciones, ver Fig. 17 (a). La familia de helicoides que se obtiene de esta combinación puede ser representada geoméricamente por una superficie reglada denominada cilindroide o conoide de Plucker, ver Fig. 17 (b).

Utilizando únicamente las reglas de diseño basadas en restricciones para construir un mecanismo con un helicoides de grado de libertad, se parte de un mecanismo con dos rotaciones no coplanares, Fig. 17 (c). Las restricciones  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  y  $C_4$  pertenecen al mecanismo con dos rotaciones, siendo la restricción  $C_5$  la que debe añadirse para obtener un solo grado de libertad de helicoides. Los ejes de los movimientos helicoidales son perpendiculares a la recta normal a



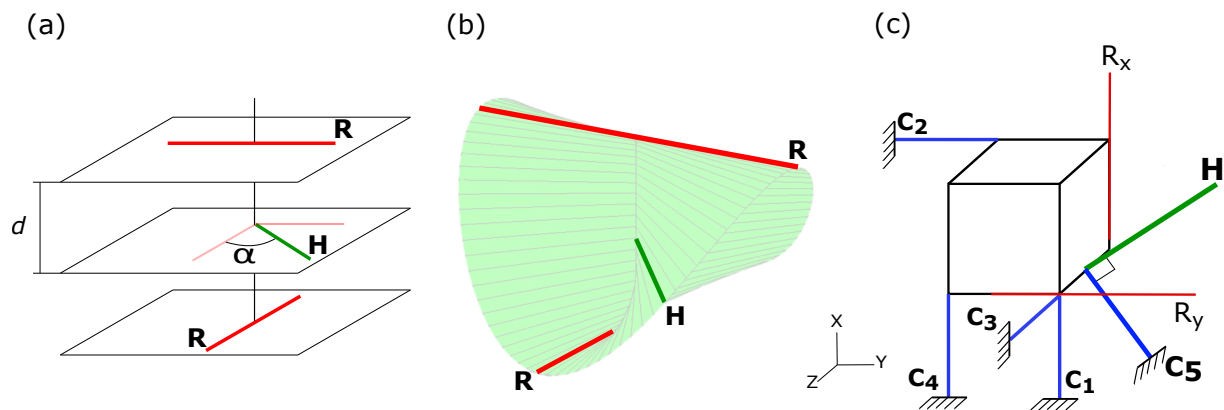


Figura 17: (a) Combinación de dos rotaciones no coplanares; (b) Superficie reglada, Cilindroide; (c) Sistema flexor con un helicoide de grado de libertad.

$R_x$  y a  $R_y$ , y se ubican entre los ejes de estas rotaciones. Una vez seleccionado el helicoide  $H$  que se requiere para el mecanismo y recordando que toda restricción deber ser concurrente (o paralela) a un eje de rotación o perpendicular a la dirección de traslación para permitir ese movimiento, la restricción  $C_5$  debe ser concurrente y perpendicular a  $H$  para permitir la rotación y traslación combinada en esa dirección.

Aplicando la teoría de helicoides, el espacio de libertad está formado por un helicoide de movimiento de paso finito ( $p \neq 0, p \neq \infty$ ). Se calcula el espacio recíproco aplicando la Ec. (5):

$$\mathbf{W} \circ \mathbf{T} = |\mathbf{f}| |\Delta\theta| [(q + p) \cos(\alpha) - d \sin(\alpha)].$$

Se estableció que el espacio de restricción debe estar formado únicamente por helicoides de fuerza pura, por lo que  $q = 0$ . Para que las restricciones sean recíprocas al helicoide de movimiento debe cumplirse:

$$p \cos(\alpha) - d \sin(\alpha) = 0$$

Si cada restricción es concurrente al eje del helicoide ( $d = 0$ ), el  $\cos(\alpha)$  debe ser cero, ya que, el paso  $p$  no puede ser nulo. Si  $\alpha = \pi/2$  ( $\sin(\alpha) = 0$  y  $\cos(\alpha) = 1$ ) no se puede cumplir la condición de reciprocidad, por lo tanto, la restricción no puede ser paralela al eje del helicoide.

Si la restricción no es concurrente al eje del helicoide, el ángulo  $\alpha$  entre ellos debe cumplir  $d \cdot \tan(\alpha) = p$ .

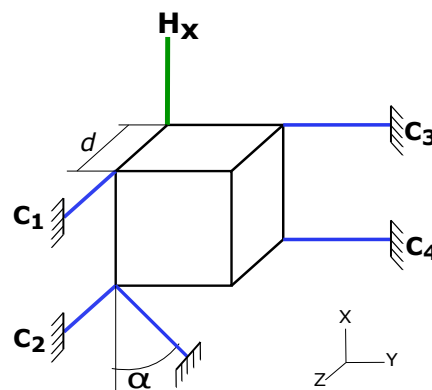


Figura 18: Sistema flexor con un helicoide de grado de libertad.

Dado un cuerpo con un grado de libertad de helicoide ( $\$1 = [1, 0, 0 | p_x, 0, 0]^T$ ), Fig. 18, el espacio restrictivo debe ser de dimensión 5. Sólo cuatro restricciones linealmente independientes pueden ser concurrentes y perpendiculares al eje del helicoide, la restricción restante debe

estar ubicada a una distancia  $d$  y formando un ángulo  $\alpha$  respecto al eje. Tanto  $d$  como  $\alpha$  están en función del paso, por lo que fijando uno de ellos se calcula el otro.

#### 4.2.2. Grados de libertad: 2 Helicoides

El espacio de libertad está formado por dos helicoides concurrentes ( $\$1 = [0, 1, 0|0, p_y, 0]^T$ ,  $\$2 = [0, 0, 1|0, 0, p_z]^T$ ) y el espacio de restricción debe ser de dimensión 4. Estos dos helicoides se pueden considerar contenidos en un plano y ninguna de las restricciones puede estar contenida en el mismo. Suponiendo que una restricción está en el mismo plano que los helicoides de movimiento, para que la restricción sea recíproca a uno de los helicoides, la restricción debe ser perpendicular al mismo y, en consecuencia, será paralelo o concurrente con cierto ángulo (menor a  $\pi/2$ ) al otro helicoides. Es decir, la restricción no puede ser recíproca a ambos helicoides de movimiento.

Las restricciones tampoco pueden estar contenidas en un plano paralelo al plano de los helicoides de movimiento, ver Fig. 19 (b). Si una restricción está en un plano paralelo al plano de movimiento formando un ángulo  $\alpha$  con respecto a uno de los helicoides, cumple con las condiciones de reciprocidad con  $H_1$  y con  $H_2$  pero en forma separada pero no es recíproca al espacio de movimiento generado por  $H_1$  y  $H_2$ . Como contraejemplos, la restricción no es recíproca al helicoides  $h_1$  por ser paralela al mismo y no es recíproca al helicoides  $h_2$  por ser perpendicular y no concurrente al mismo, donde  $h_1$  y  $h_2$  se obtienen de la combinación lineal de  $H_1$  y  $H_2$ . En conclusión, las restricciones deben tener un ángulo distinto de cero respecto al plano de movimiento para pertenecer al espacio recíproco. Esta afirmación es válida únicamente cuando la combinación de dos helicoides de movimiento con pasos finitos (y no nulos) siempre da otro helicoides con paso finito (y no nulos).

Cuando el signo del paso de uno de los helicoides de movimiento es contrario al del otro helicoides ( $\$1 = [0, 1, 0|0, p_y, 0]^T$ ,  $\$2 = [0, 0, 1|0, 0, -p_z]^T$ ), se pueden combinar de manera tal de obtener dos rotaciones no coplanares:

$$\$1' = \left[ 0, 1, \sqrt{p_y/p_z} \mid 0, p_y, -p_z \cdot \sqrt{p_y/p_z} \right]^T$$

$$\$2' = \left[ 0, 1, -\sqrt{p_y/p_z} \mid 0, p_y, p_z \cdot \sqrt{p_y/p_z} \right]^T$$

donde,  $\$1' = \$1 + \sqrt{p_y/p_z} \$2$  y  $\$2' = \$1 - \sqrt{p_y/p_z} \$2$ .

Es únicamente en este caso que la restricción puede hallarse en un plano paralelo al plano de los helicoides.

El cuerpo de la Fig. 19 (a) tiene 2 grados de libertad de helicoides. De las 4 restricciones sólo 1 puede ser perpendicular al plano de movimiento y debe pasar por el punto de concurrencia de los ejes de los helicoides; por ejemplo,  $C_1$ . Las otros 3 deben tener un ángulo menor a  $\pi/2$ , mayor a cero y estar a cierta distancia del punto de concurrencia. Por ejemplo, la restricción  $C_2$  es perpendicular y concurrente a  $H_z$  por lo que será recíproco a éste, independientemente del valor del paso  $p_z$ . Para ser recíproco a  $H_y$  debe estar a una distancia  $d$  y con un ángulo  $\alpha$ , de manera que se cumpla  $d \tan(\alpha) = p_y$ . De la misma forma, se define la restricción  $C_3$  y  $C_4$ ; perpendicular y concurrente a uno de los ejes de los helicoides y ubicado a cierta distancia del otro eje de helicoides y con un ángulo relativo entre ellos.

En la Fig. 19 (a) se observa que todas las restricciones son no coplanares. Por lo tanto, la combinación de estas restricciones no nos dará otra restricción de fuerza pura, sino que tendrá un valor de paso distinto de cero (de manera análoga a dos rotaciones no coplanares). Como

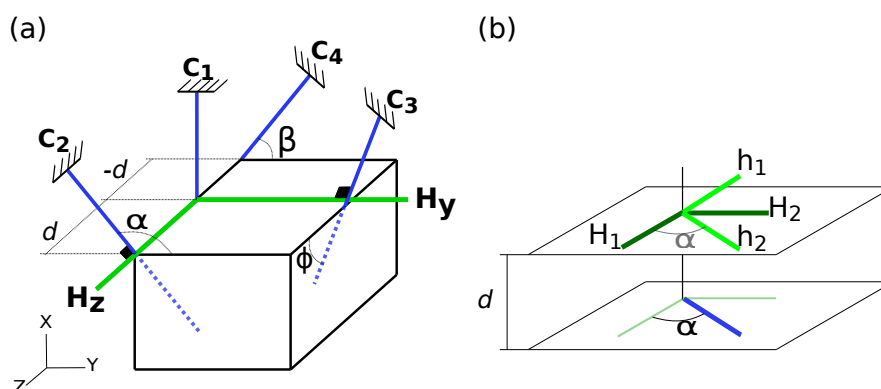


Figura 19: (a) Sistema flexor con dos helicoides de grado de libertad; (b) Restricción en plano paralelo al plano de movimiento .

el elemento flexor viga es una restricción de fuerza pura, siempre tendrá que estar ubicado como indica la Fig. 19 (a), por lo menos , perpendicular y concurrente a uno de los ejes de los helicoides. En otras palabras, la restricción no puede ser recíproca a ambos helicoides si no es concurrente (y perpendicular) a uno de ellos o a ambos.

#### 4.2.3. Grados de libertad: 1 Helicoide- 1 Rotación

Cuando el eje de rotación es paralelo al eje del helicoide, el sistema es equivalente a una rotación y a una traslación paralela al eje de rotación. En caso de que el ángulo entre los ejes de rotación y del helicoide sea mayor a cero y menor a  $\pi/2$ , el sistema será equivalente a dos rotaciones no coplanares. Si el eje de rotación no es concurrente al eje del helicoide, el sistema también es equivalente a dos rotaciones no coplanares. Entonces, cuando el eje de rotación es concurrente y perpendicular al helicoide, cualquier combinación entre ellos dará una rotación y un helicoide.

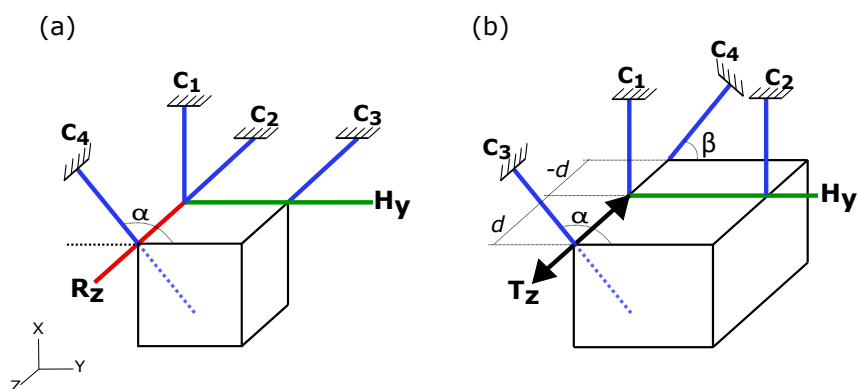


Figura 20: Sistemas flexores con dos grados de libertad: (a) Una rotación y un helicoide; (b) Una traslación y un helicoide.

Para que las restricciones sean recíprocas, deben ser concurrentes o paralelas al eje de rotación, además, ser concurrentes y perpendiculares al eje del helicoide, o cumplir con  $d \tan(\alpha) = p$ . Como los 2 ejes del movimiento son concurrentes, es posible imaginarlos contenidos en un plano como en la Fig. 20 (a). Una restricción  $C_1$  perpendicular al plano y que pasa por el punto de concurrencia de los ejes cumple con los criterios de reciprocidad. Cualquier restricción contenida en dicho plano es recíproca a la rotación y para que sean recíprocas, además, al heli-

coide deben ser perpendiculares a éste. Sólo dos restricciones pueden cumplir esas condiciones ( $C_2$  y  $C_3$ ). Finalmente, la última restricción debe ser concurrente al eje de rotación y cumplir  $d \tan(\alpha) = p_y$ .

#### 4.2.4. Grados de libertad: 1 Helicoide- 1 Traslación

Si la dirección de la traslación es paralela al eje del helicoide, el sistema es equivalente a una rotación y a una traslación paralela al eje de rotación. Si el ángulo entre la dirección de traslación y el eje del helicoide es menor a  $\pi/2$ , el sistema también es equivalente a una rotación y una traslación.

Si la dirección de traslación es perpendicular al eje del helicoide, cualquier combinación entre ellos nos dará una traslación y un helicoide, Fig. 20 (b). Para construir el espacio de restricción, se considera un plano que contenga al helicoide y que sea perpendicular a la dirección de traslación. Dos restricciones  $C_1$  y  $C_2$  perpendiculares al eje del helicoide y contenidos en dicho plano pertenecen al espacio recíproco. Para definir las otras dos restricciones se seleccionan dos planos paralelos al anterior, en los cuales estarán contenidas  $C_3$  y  $C_4$ . El ángulo que formarán respecto al eje del helicoide  $H_y$  estará en función de la distancia  $d$  y del paso  $p_y$ . De esta forma las restricciones serán recíprocas a  $T_z$  por ser perpendiculares a ésta y serán recíprocas al helicoide por cumplir  $d \tan(\alpha) = p$ .

#### 4.2.5. Grados de libertad: 3 Helicoides

Aplicando las observaciones que se hicieron en el caso de dos grados de libertad de helicoides, el sistema de tres grados de libertad (Fig. 21 (a)) no puede ser construido. Ninguna restricción puede ser concurrente a los 3 ejes de helicoides y ser perpendicular a todos. Tampoco puede ser perpendicular y concurrente a un sólo helicoide, porque de serlo, se hallaría contenida en un plano paralelo al plano formado por los otros dos helicoides.

Supónganse una restricción con cualquier dirección  $(F_x, F_y, F_z)$  y ubicada a una distancia  $d$   $(d_x, d_y, d_z)$  del origen de referencia. El helicoide de restricción será

$$\begin{aligned} \mathbf{W} &= [\mathbf{F} | \mathbf{F} \times \mathbf{d}]^T \\ \mathbf{W} &= [F_x, F_y, F_z | (F_y \cdot d_z - F_z \cdot d_y), (F_z \cdot d_x - F_x \cdot d_z), (F_x \cdot d_y - F_y \cdot d_x)]^T \end{aligned}$$

Los helicoides que forman el espacio de libertad son

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_1 &= [1, 0, 0 | p_x, 0, 0]^T \\ \mathbf{T}_2 &= [0, 1, 0 | 0, p_y, 0]^T \\ \mathbf{T}_3 &= [0, 0, 1 | 0, 0, p_z]^T \end{aligned}$$

El helicoide de restricción  $\mathbf{W}$  debe ser recíproco a cada uno de los helicoides de libertad. De esta manera se plantean tres ecuaciones

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_1 \circ \mathbf{W} &= p_x \cdot F_x + (F_y \cdot d_z - F_z \cdot d_y) = 0 \\ \mathbf{T}_2 \circ \mathbf{W} &= p_y \cdot F_y + (F_z \cdot d_x - F_x \cdot d_z) = 0 \\ \mathbf{T}_3 \circ \mathbf{W} &= p_z \cdot F_z + (F_x \cdot d_y - F_y \cdot d_x) = 0 \end{aligned}$$

y despejando  $d_i$  de cada una de las ecuaciones y reemplazando, se obtiene

$$(F_z)^2 p_z + (F_y)^2 p_y + (F_x)^2 p_x = 0$$

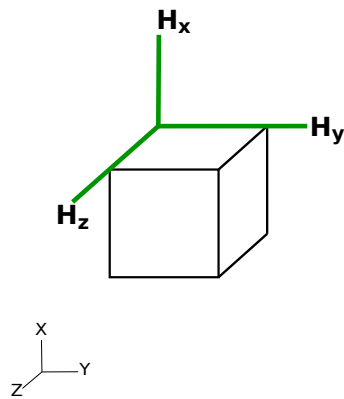
La única manera de que esta ecuación se anule, es que uno de los pasos sea de signo distinto al de los otros dos. Es decir, que si todos los pasos son de igual signo, el mecanismo no puede ser construido.

Cuando el signo de uno de los pasos es distinto al del resto ( $p_x, p_y, -p_z$ ), el sistema de 3 grados de libertad de helicoides es equivalente a un sistema de 3 rotaciones no coplanares

$$\begin{aligned} \mathbf{T}'_1 &= \left[ 1, 0, \sqrt{p_x/p_z} \mid p_x, 0, -p_z \sqrt{p_x/p_z} \right]^T \\ \mathbf{T}'_2 &= \left[ 0, 1, \sqrt{p_y/p_z} \mid 0, p_y, -p_z \sqrt{p_y/p_z} \right]^T \\ \mathbf{T}'_3 &= \left[ 0, 1, -\sqrt{p_y/p_z} \mid 0, p_y, p_z \sqrt{p_y/p_z} \right]^T \end{aligned}$$

donde,  $\mathbf{T}'_1 = \mathbf{T}_1 + \sqrt{p_x/p_z} \mathbf{T}_3$ ,  $\mathbf{T}'_2 = \mathbf{T}_2 + \sqrt{p_y/p_z} \mathbf{T}_3$  y  $\mathbf{T}'_3 = \mathbf{T}_2 - \sqrt{p_y/p_z} \mathbf{T}_3$ .

(a)



(b)

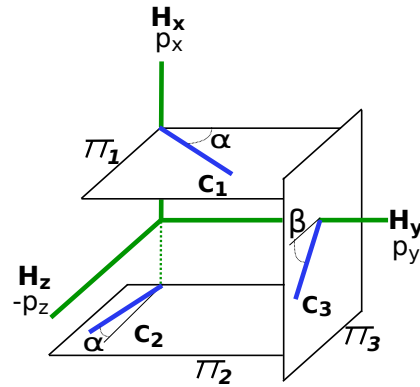


Figura 21: Sistema flexor con tres helicoides de grado de libertad: (a) Tres helicoides con pasos de igual signo; (b) Tres helicoides con un paso ( $-p_z$ ) de signo distinto al resto.

Para la construcción del mecanismo se sigue la metodología vista para tres rotaciones no coplanares, otra alternativa en la que no implique trabajar con las rotaciones es la siguiente.

Se estableció que la restricción debe ser siempre perpendicular y concurrente a un eje de los helicoides en sistemas con dos o más grados de libertad de helicoides. Esto implica que la restricción será paralela al plano formado por las otras dos restricciones. Ninguna restricción puede ser paralela a dicho plano, salvo, que en ese plano estén dos helicoides con pasos de distinto signo. En la Fig. 21 (b) se puede observar que ninguna restricción puede ser perpendicular y concurrente al helicoide  $H_z$  porque, de serlo, sería paralelo al plano formado por  $H_x$  y  $H_y$  que tienen pasos de igual signo. Las restricciones  $C_1$ ,  $C_2$  y  $C_3$  son paralelas a planos que contienen a  $H_z$  ( $-p_z$ ). La ubicación de  $C_1$  y el ángulo que forma respecto a  $H_y$  surge de las condiciones  $d \tan(\alpha) = p_y$  y  $d \tan(\pi/2 - \alpha) = -p_z$ . De manera semejante, se calculan las ubicaciones de las otras restricciones.

#### 4.2.6. Grados de libertad: 2 Helicoides- 1 Rotación

Se pueden diferenciar dos casos: los pasos de los helicoides son de igual signo o no.

En el primer caso (Fig. 22 (a)), la única restricción que es recíproca a todos los movimientos es la que pasa por el punto de concurrencia de los helicoides y es perpendicular a éstos, además

de ser concurrente al eje de rotación. Para que otra restricción sea recíproca a los helicoides debe ser perpendicular y concurrente a uno de ellos;  $H_z$ , por ejemplo. En consecuencia estará en un plano paralelo al plano formado por el eje de rotación y el helicoides restante ( $H_y - R_x$ ), formando un ángulo  $\alpha$  respecto al helicoides. Es decir, no será paralela ni concurrente al eje de rotación, por ende, no será recíproca a la rotación. Este caso no puede ser construido.

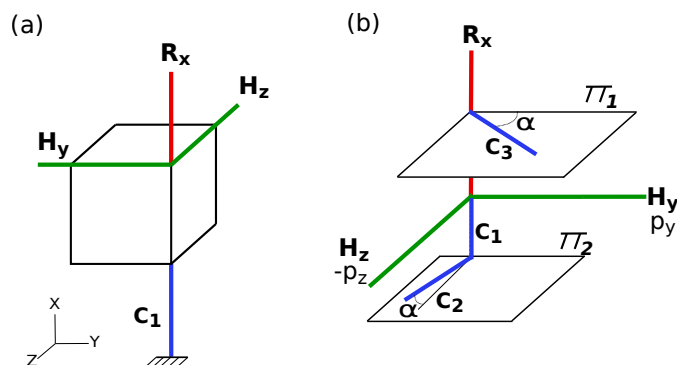


Figura 22: Sistema flexor con dos helicoides y una rotación: (a) Dos helicoides con pasos de igual signo; (b) Dos helicoides con un paso ( $p_y$ ) de signo distinto ( $-p_z$ ) al otro.

En el segundo caso, el espacio de libertad es equivalente a dos rotaciones no coplanares y a una tercera rotación concurrente a las dos primeras. En este caso, el mecanismo sí puede ser construido. Las restricciones sí pueden ser paralelas al plano formado por los helicoides, la distancia y el ángulo que forman respecto a ellos estarán definidas por la condición de reciprocidad:  $d \tan(\alpha) = p_y$  y  $d \tan(\pi/2 - \alpha) = -p_z$ . Luego, para que además sean recíprocas a la rotación deben ser concurrentes al eje de la misma. Con este criterio se definen las restricciones  $C_2$  y  $C_3$ , como las de la Fig. 22 (b), que en conjunto con  $C_1$  forman el espacio de restricción.

#### 4.2.7. Grados de libertad: 2 Helicoides- 1 Traslación

En este espacio de libertad también se pueden diferenciar dos casos, que los pasos de los helicoides sean de igual signo o no.

En el primer caso, Fig. 23 (a), el mecanismo no puede ser construido. Las restricciones para ser recíprocas a la traslación deben ser perpendiculares a la dirección de la traslación, implicando que sean paralelas al plano formado por los helicoides; luego, no pueden ser recíprocas a ambos.

En el segundo caso, Fig. 23 (b), las restricciones sí pueden ser paralelas al plano formado por los helicoides; la distancia y el ángulo que forman respecto a ellos estarán definidas por las condiciones de reciprocidad  $d \tan(\alpha) = p_y$  y  $d \tan(\pi/2 - \alpha) = -p_z$ . De esta manera, se definen las restricciones  $C_1$  y  $C_2$ . La tercer restricción debe ser paralela a  $C_1$  y estar contenida en el plano  $\pi_1$  o ser paralela a  $C_2$  y estar contenida en el plano  $\pi_2$ . El motivo de ello es simple de ver en la Fig. 23 (c), el sistema de dos helicoides es equivalente a dos rotaciones no coplanares. La restricción  $C_1$  es concurrente a uno de los ejes de rotación y paralelo al otro. La restricción  $C_2$  satisface lo mismo. Es por eso que si  $C_3$  es paralela a  $C_1$ , debe estar en el plano  $\pi_1$  para ser concurrente a uno de los ejes de rotación y paralela al otro.

#### 4.2.8. Grados de libertad: 1 Helicoides- 1 Rotación- 1 Traslación

La dirección de la traslación puede ser perpendicular al eje de rotación o paralela.

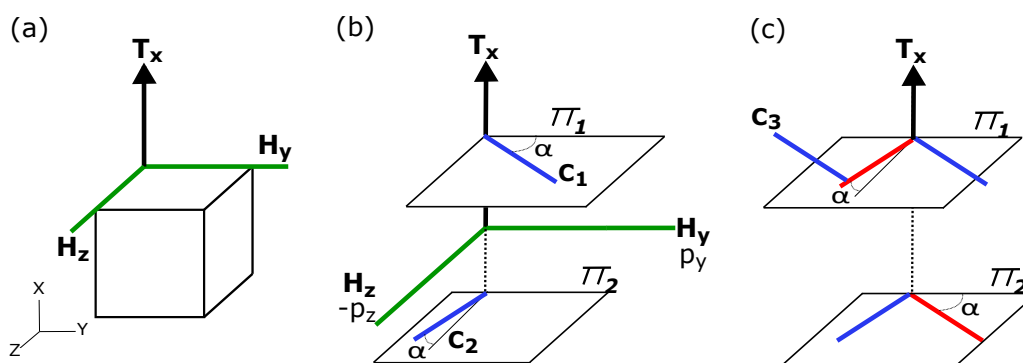


Figura 23: Sistema flexor con dos helicoides y una traslación: (a) Dos helicoides con pasos de igual signo; (b) Dos helicoides con un paso de signo distinto ( $-p_z$ ) al otro; (c) Sistema equivalente a (b), dos rotaciones no coplanares y una traslación

En el primer caso, Fig. 24 (a), las restricciones deben estar contenidas en un plano perpendicular a  $T_x$  para ser recíprocas a la traslación. Para ser además recíprocas al helicoides, una de las condiciones es ser perpendiculares y concurrentes al eje del helicoides. Sólo dos restricciones cumplen ambos requisitos,  $C_1$  y  $C_2$ . Además, estas restricciones son paralelas al eje de rotación, y por ende, también son recíprocas a éste. Otra condición para que sea recíproca al helicoides es que no debe ser concurrente y formar un ángulo menor a  $\pi/2$  con el eje del helicoides. Si esta restricción se halla en un plano perpendicular a  $T_x$  será recíproco también a la traslación, pero no a la rotación por no ser concurrente o paralela al eje de rotación. Si la restricción recíproca al helicoides es concurrente al eje de rotación, no será perpendicular a  $T_x$ . El mecanismo no puede ser construido.

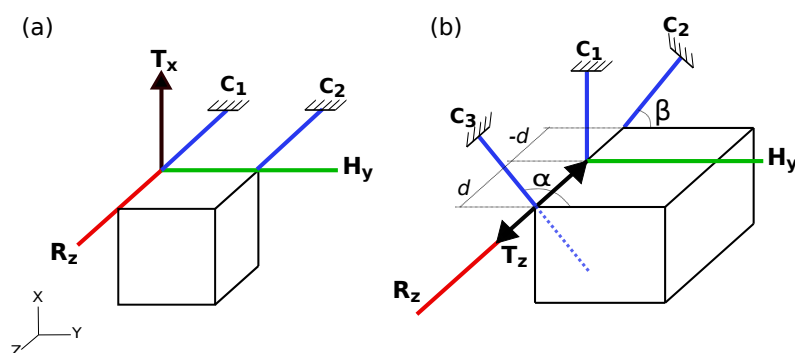


Figura 24: Sistema flexor con tres grados de libertad, una rotación, una traslación y un helicoides: (a) Traslación perpendicular al eje de rotación; (b) Traslación paralela al eje de rotación.

En el segundo caso, Fig. 24 (b), las restricciones deben ser concurrentes al eje de rotación y perpendicular a éste. De esta forma las restricciones son recíprocas a la rotación y a la traslación. Para que sean recíprocas al helicoides una ( $C_1$ ) debe ser perpendicular al eje de  $H_y$  y pasar por el punto de concurrencia de los ejes de rotación y del helicoides. Las otras 2 restricciones,  $C_2$  y  $C_3$ , no deben ser concurrentes al helicoides y deben tener un ángulo menor a  $\pi/2$  respecto al mismo. La distancia y el ángulo son función del paso  $p_y$ .

#### 4.2.9. Grados de libertad: 2 Rotaciones- 1 Helicoides

Dos rotaciones concurrentes se pueden considerar contenidas en un plano, el helicoides se localiza perpendicular a dicho plano y pasando por el punto de concurrencia de las rotaciones,



ver Fig. 25 (a). Para que las restricciones sean recíprocas a las rotaciones, deben ser coplanares a ellas. Toda restricción que se halle en el plano que contiene las dos rotaciones será perpendicular al eje del helicoides, entonces deben ser concurrentes a dicho eje para ser recíprocas al helicoides. Sólo las restricciones  $C_1$  y  $C_2$  de la figura cumplen estas condiciones. La tercer restricción no puede ser coplanar a las rotaciones (sería dependiente de  $C_1$  y  $C_2$ ), debe pasar por el punto de concurrencia de los ejes de rotaciones para ser recíproca a éstas y aún al intersectar al helicoides con un ángulo distinto a  $\pi/2$  no será recíproco a éste. El mecanismo no puede ser construido.

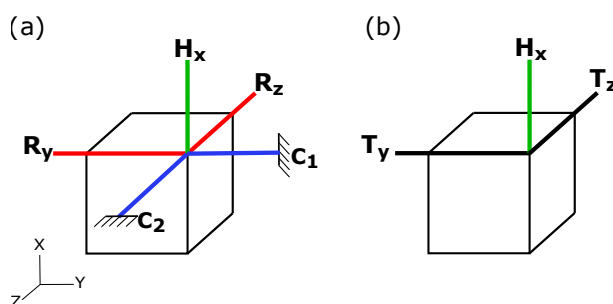


Figura 25: Sistema flexor con tres grados de libertad: (a) Dos rotaciones y un helicoides; (b) Dos traslaciones y un helicoides.

Si al espacio de libertad se le agrega una traslación paralela al plano formado por las rotaciones (caso 13 en la Tabla 2), las restricciones además de ser coplanares a las rotaciones y concurrentes al eje del helicoides, deben ser perpendiculares a la dirección de la traslación. Solamente una restricción puede satisfacer todas esas condiciones, por lo que el mecanismo tampoco puede ser construido.

#### 4.2.10. Grados de libertad: 2 Traslaciones- 1 Helicoides

Dos traslaciones siempre forman un plano llamado plano de traslación y perpendicular a éste se localiza el helicoides, Fig. 25 (b). Las restricciones para ser recíprocas a las traslaciones deben ser perpendiculares al plano de traslación, lo que implica que sean paralelas al eje del helicoides. Ninguna restricción recíproca a las traslaciones será recíproca al helicoides. El mecanismo no puede ser construido.

Si al espacio de libertad se le agrega una rotación paralela al plano de traslación (caso 14 en la Tabla 2), el mecanismo tampoco puede ser construido debido a la incompatibilidad de las condiciones de reciprocidad de las traslaciones y del helicoides.

#### 4.2.11. Grados de libertad: 2 Helicoides- 1 Traslación- 1 Rotación

El eje de rotación es paralelo a la dirección de la traslación, implicando que las restricciones deben ser concurrentes y perpendiculares al eje de rotación para ser recíprocas a ambos. De esta manera las restricciones serán paralelas al plano formado por los dos helicoides.

Si los pasos de los helicoides son de igual signo, como en la Fig. 26 (a), el mecanismo no puede ser construido.

Si los pasos de los helicoides son de distinto signo, como en la Fig. 26 (b), existen 2 restricciones paralelas al plano formado por los helicoides que son recíprocas al espacio de libertad y puede construirse.



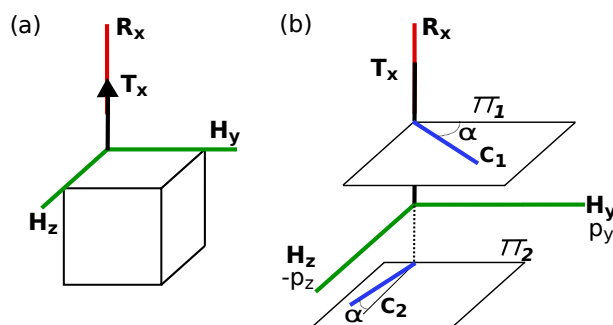


Figura 26: Sistema flexor con cuatro grados de libertad: dos helicoides, una traslación y una rotación; (a) Pasos de los helicoides de igual signo; (b) Pasos de los helicoides de distinto signo.

#### 4.2.12. Grados de libertad: 1 Helicoide- 2 Traslaciones- 2 Rotaciones

Un elemento flexor de viga restringe únicamente el desplazamiento de un cuerpo en la dirección de su eje, ver Fig. 27, pero permite 3 rotaciones cuyos ejes son concurrentes al extremo de la misma. Además, permite 2 traslaciones perpendiculares a la traslación que restringe. En consecuencia, cuando el espacio de libertad sea de dimensión 5, éste debe estar formado por los movimientos que la restricción de viga permite, de lo contrario el mecanismo no tiene construcción.

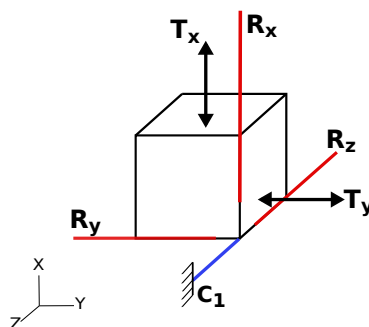


Figura 27: Sistema flexor con cinco grados de libertad.

### 4.3. Discusión y comentarios finales

Las Tablas 10 y 11 resumen, respectivamente, los casos de las Subsecciones 4.1 y 4.2 que se pueden construir físicamente. En la literatura (Su y Tari, 2010), se consideran 34 combinaciones de movimientos, es decir, un caso más a los analizados en este trabajo. Dicho caso es: una rotación, una traslación y un helicoide, cuyo eje es paralelo a la dirección de traslación, por ejemplo:  $R_x$ ,  $T_y$ , y  $H_y$ . En la Subsección 4.2.4 se argumentó que eje del helicoide debe ser perpendicular a la dirección de la traslación, de lo contrario, el espacio de libertad era equivalente a una rotación y una traslación a lo largo del mismo eje (o paralelos) y una rotación perpendicular al mismo. En consecuencia, el sistema es redundante debido a que es equivalente al sistema  $R_x$ ,  $T_y$ , y  $R_y$  ya estudiado y por ese motivo no fue analizado en este trabajo. La Tabla 12 figuran los espacios de libertad que tienen construcción únicamente cuando el signo del paso de uno de los helicoides ( $H$ ) es de signo contrario al resto. En esos casos, los movimientos helicoidales son equivalentes a rotaciones no coplanares. Por este motivo, los espacios de libertad que se encuentran en esta tabla son equivalentes a ciertos casos de la Tabla 10.

N	caso	sub-caso
1	R	1) $R_x$
	T	2) $T_x$
2	RR	3) $R_x \cdot R_y$
	RT	4) $R_x \cdot T_x$
		5) $R_x \cdot T_z$
3	RRR	6) $R_x \cdot R_y \cdot R_z$
	RRT	7) $R_x \cdot R_y \cdot T_x$
		8) $R_x \cdot R_y \cdot T_z$
	RTT	9) $R_x \cdot T_y \cdot T_z$
4	RRRT	10) $R_x \cdot R_y \cdot R_z \cdot T_x$
	RRTT	11) $R_x \cdot R_y \cdot T_x \cdot T_z$
5	RRRTT	12) $R_x \cdot R_y \cdot R_z \cdot T_x \cdot T_y$

Tabla 10: Grados de libertad, traslaciones y rotaciones, que un mecanismo paralelo puede tener.

N	caso	sub-caso
1	H	1) $H_x$
2	HH	2) $H_y \cdot H_z$
	HT	3) $H_y \cdot T_z$
	HR	4) $H_y \cdot R_z$
3	HTR	5) $H_y \cdot T_z \cdot R_z$

Tabla 11: Grados de libertad, incluyendo helicoides, que un mecanismo paralelo puede tener.

## 5. CONCLUSIONES

En este trabajo se describieron los fundamentos del método basado en restricciones para el diseño de mecanismos flexibles paralelos de precisión utilizando elementos flexores de viga. Se presentó un análisis geométrico exhaustivo de todas las posibilidades para diseñar mecanismos flexibles de precisión restringidos con vigas clasificándolos como mecanismos con movimientos de traslación y rotación exclusivamente, y luego se realizó el estudio para movimientos de helicoides. Para cada espacio de libertad se analizó su correspondiente configuración del espacio de restricción utilizando vigas, explicando en cada caso los casos físicamente posibles, completando las explicaciones faltantes en la literatura. Como principal contribución del trabajo, en la Tablas 10 y 11 se resumieron los casos que se pueden construir físicamente. A futuro, se implementarán simulaciones computacionales para cada uno de esos casos completando los ya analizados en estudios previos (Pucheta et al., 2016; Pucheta y Gallardo, 2017).

N	caso	sub-caso
3	*HHH	1) $H_x \cdot H_y \cdot H_z$
	*HHR	2) $H_y \cdot H_z \cdot R_x$
	*HHT	3) $H_y \cdot H_z \cdot T_x$
4	*HHRT	4) $H_y \cdot H_z \cdot R_x \cdot T_x$

Tabla 12: Espacios de movimientos que sólo tienen construcción cuando los pasos son de signos diferentes.

## Agradecimientos

Se agradece al apoyo financiero del Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas por la beca doctoral del primer autor, a la Universidad Tecnológica Nacional (proyecto PID-UTN 3935) y a la Agencia Nacional de Promoción Científica y Tecnológica (proyecto PICT-2013-2894).

## REFERENCIAS

- Angeles J. *Rational Kinematics*. Springer Tracts in Natural Philosophy 34. Springer-Verlag, New York, 1 edición, 1988.
- Blanding D.L. *Exact constraint: machine design using kinematic principles*. ASME Press, New York, 1999.
- Hopkins J. *Design of Flexure-based Motion Stages for Mechatronic Systems via Freedom, Actuation and Constraints Topologies (FACT)*. Tesis de Doctorado, Massachusetts Institute of Technology, Massachusetts, 2010.
- Hopkins J. y Culpepper M. Synthesis of multi-degree of freedom, parallel flexure system concepts via freedom and constraint topology (FACT) – Part I: Principles. *Precision Engineering*, 34(2):259–270, 2010a.
- Hopkins J. y Culpepper M. Synthesis of multi-degree of freedom, parallel flexure system concepts via freedom and constraint topology (FACT) – Part II: Practice. *Precision Engineering*, 34(2):271–278, 2010b.
- Howell L.L. *Compliant Mechanisms*. John Wiley & Sons, New York, 2001.
- Howell L.L., Magleby S.P., y Olsen B.M. *Handbook of Compliant Mechanisms*. Wiley, New York, 2013.
- Hunt K.H. *Kinematic Geometry of Mechanisms*. Oxford University Press, New York, 1978.
- Phillips J. *Freedom in Machinery Vol .I: Introducing Screw Theory*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1984.
- Pucheta M.A. y Gallardo A.G. Synthesis of precision flexible mechanisms using screw theory with a finite elements validation. 2017. Accepted to be presented in the 6th International Symposium on Multibody Systems and Mechatronics – MuSMe 2017, Florianópolis, Brasil.
- Pucheta M.A., Gallardo A.G., y Bernad J.A. Empleo de teoría de helicoides para el diseño de mecanismos flexibles de precisión tridimensionales. En S. Giusti, M. Pucheta, y M. Storti, editores, *Mecánica Computacional*, volumen XXXIV, páginas 2825–2845. XXII Congreso sobre Métodos Numéricos y sus Aplicaciones, ENIEF 2016, AMCA, Córdoba, Argentina, 2016.
- Ru C., Liu X., y Sun Y. *Nanopositioning Technologies: Fundamentals and Applications*. Springer International Publishing, 2016.
- Smith S. y Chetwynd D. *Foundations of Ultra-Precision Mechanism Design*. Vol. 2 of Developments in Nanotechnology. Taylor & Francis, Boca Raton, Florida, 1992.
- Smith S.T. *Flexures: Elements of Elastic Mechanisms*. CRC Press, Boca Raton, Florida, 2000.
- Su H.J., Dorozhkin D.V., y Vance J.M. A screw theory approach for the conceptual design of flexible joints for compliant mechanisms. *Journal of Mechanisms and Robotics*, 1(4):041009–041009–8, 2009a.
- Su H.J., Dorozhkin D.V., y Vance J.M. A screw theory approach for the type synthesis of compliant mechanisms with flexures. En *Volume 7: 33rd Mechanisms and Robotics Conference, Parts A and B. Proc. of ASME IDETC 2009*, páginas 151–161. San Diego, California, USA, 2009b.

Su H.J. y Tari H. Realizing orthogonal motions with wire flexures connected in parallel. *ASME J. Mech. Design*, 132(12):121002–121002–7, 2010. doi:10.1115/1.4002837.